

**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»**

1. Цель и задачи вступительного испытания

Вступительное испытание в магистратуру направлено на выявление степени готовности абитуриентов к освоению магистерской программы «Математическое образование». В ходе вступительных испытаний оцениваются знания и умения, выявляющие владение теоретическими основами математики и методики обучения математике, а также степень сформированности компетенций, значимых для успешного обучения в магистратуре по указанной программе.

**2. Основные требования
к уровню подготовки / знаниям, умениям и навыкам /
компетентности поступающего**

Абитуриент, поступающий в магистратуру, должен владеть компетенциями, значимыми для успешного обучения по выбранной программе:

а) общекультурными (ОК): владеет культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения; способен использовать знания о современной естественнонаучной картине мира в образовательной деятельности, применять методы математической обработки информации, теоретического и экспериментального исследования; умеет логически верно, аргументировано и ясно строить письменную речь;

б) профессиональными (ПК):

- **общепрофессиональными (ОПК):** осознает социальную значимость своей будущей профессии, обладает мотивацией к выполнению профессиональной деятельности; владеет основами речевой профессиональной культуры;

- **в области педагогической деятельности:** понимает место и роль математики в системе научного знания; понимает сущность аксиоматического метода как основного способа построения математических теорий; владеет основами фундаментальных математических теорий (алгебры, геометрии, математического анализа),

понимает их взаимосвязь и специфику каждой из них; умеет применять основной аппарат фундаментальных и прикладных математических теорий к решению разнообразных теоретических и практических задач в области математики.

3. Форма вступительного испытания и его процедура

Вступительное испытание проводится в письменной форме по вариантам с применением дистанционных образовательных технологий. Продолжительность экзамена – 90 минут.

По результатам вступительного испытания выставляется оценка по 100-балльной шкале. Оценка каждого задания проводится в соответствии с критериями (см. пункт Критерии оценки).

Объявление итогов экзамена происходит в соответствии с графиком оглашения результатов вступительных испытаний в магистратуру.

При проведении вступительного испытания применяются следующие контролирующие средства: задания практического характера, ориентированные на выявление умений и навыков решения стандартных математических задач в объеме программы бакалавриата по направлению «педагогическое образование».

4. Содержание программы

Математический анализ

Множества. Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества. Несчетность множества действительных чисел.

Различные определения предела функции. Предел последовательности. Основные теоремы о пределах. Непрерывность функции. Теорема Больцано-Коши. Свойства функций, непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса, теорема Кантора).

Производная. Дифференцируемые функции одной и нескольких переменных, связь дифференцируемости с непрерывностью и существованием производной (частных производных). Техника дифференцирования. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью первой и второй производных.

Первообразная и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Конструкция интеграла Римана. Условия интегрируемости, основные классы интегрируемых функций. Формула Ньютона-Лейбница. Спряжляемые кривые. Квадрируемые фигуры.

Числовые ряды. Основные признаки сходимости положительных рядов. Абсолютная и условная сходимость. Признак Лейбница. Степенные ряды. Ряд Тейлора. Условия разложимости функции в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций. Элементарные функции комплексной переменной.

Дифференциальные уравнения. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Алгебра

Разложение целых чисел в произведение простых (основная теорема арифметики). Деление целых чисел с остатком. Сравнение целых чисел по модулю. Свойства сравнений. Наибольший общий делитель двух целых чисел. Алгоритм Евклида. Свойство последнего члена последовательности Евклида.

Определение системы вещественных чисел. Определение комплексных чисел. Действия с комплексными числами в нормальной и тригонометрической формах. Числовые поля. Минимальность поля рациональных чисел. Неприводимые полиномы над полем. Разложение полинома над полем на неприводимые множители. Неприводимые полиномы над полями комплексных, вещественных, рациональных чисел. Количество корней полинома.

Решение систем линейных уравнений методом исключения неизвестных (метод Гаусса). Определение линейного пространства. Примеры. Нулевой и противоположный элементы, их свойства. Линейная зависимость и линейная независимость элементов линейного пространства. Базис множества элементов линейного пространства. Ранг совокупности элементов. Ранг матрицы. Критерий разрешимости системы линейных уравнений.

Определение группы, кольца, поля, свойства. Примеры.

Геометрия

Векторы. Сложение, умножение вектора на число. Теоремы о разложении векторов. Скалярное произведение векторов. Определение и свойства.

Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Угол между прямыми. Уравнения плоскости и прямой в пространстве.

Аксиоматический метод в геометрии. Аксиомы евклидовой планиметрии. Непротиворечивость евклидовой геометрии. Система

аксиом планиметрии Лобачевского. Ее непротиворечивость. Независимость аксиомы параллельности Евклида.

Движения плоскости (определение и общие свойства). Площадь многоугольной фигуры. Теорема единственности.

Топологическое пространство. Непрерывные отображения. Гомеоморфизмы. Примеры.

Определение элементарной кривой. Способы ее задания. Касательная. Длина кривой (определение и вычисление). Кривизна кривой. Соприкасающаяся плоскость кривой. Кручение кривой.

Методика обучения математике

Основные направления реформирования системы общего среднего образования и их реализации в системе общего школьного математического образования. Различные цели математического образования, в том числе и на различных ступенях общего среднего образования. Различные подходы, реализуемые в процессе обучения математике в образовательной школе. Особенности процесса обучения математике в связи с реализацией Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) общего образования.

Виды математических курсов и формы внеклассных занятий по математике в общеобразовательной школе. Основные целевые установки при их изучении. Роль элективных курсов по математике на этапе предпрофильной подготовки и профильного обучения (их специфика). Факультативные курсы: их специфика и значение.

Изменения в содержании общего математического образования. Внесение элементов логики, теории вероятностей и математической статистики в школьное математическое содержание, работа с информацией (работа с данными). Общекультурные и прикладные вопросы в школьном курсе математики.

Основные компоненты математического содержания: математические понятия и их определения, трактовки математических понятий, теоремы и их доказательства, алгоритмы и правила, математические задачи. Этапы работы с основными компонентами математического содержания в процессе обучения.

Организация самостоятельной деятельности учащихся на уроках математики и во внеурочное время. Особенности содержания и структуры поисковой, исследовательской и проектной деятельности учащихся при обучении математике.

Современные технологии обучения математике. Мультимедийные средства обучения математике.

Традиционные и новые формы организации контроля усвоения математических знаний. Роль и место тестов при обучении математике. ЕГЭ как форма итогового контроля освоения математического содержания в общеобразовательной школе.

5. Критерии оценки

Работы абитуриентов оцениваются по 100-балльной шкале.

Экзаменационная работа состоит из 10 заданий. Абитуриент (независимо от выбора магистерской программы) решает все задания.

Работа состоит из четырёх групп заданий (вопросов). Первая группа задач (вопросов) относится главным образом к алгебре, вторая – к геометрии, третья – к математическому анализу, четвёртая – к методике обучения математике. В первой и второй группах – по два задания, в третьей и четвёртой – по три.

Каждое задание (вопрос) оценивается из 10 баллов.

Критерии оценивания задания (вопроса):

- правильный ответ с полным объяснением – 9-10 баллов;
- ответ с незначительной неточностью или недостаточно полный – 6-8 баллов;
- ответ неполный или содержащий принципиальную ошибку – 4-5 баллов;
- неверный ответ, содержащий здравую идею или демонстрирующий понимание сути задания – 1-3 балла;
- отсутствие ответа или принципиально неверный ответ – 0 баллов.

6. Примерный перечень вопросов и типов заданий для подготовки к вступительному испытанию

Найти предел заданной функции (последовательности). Доказать существование предела заданной функции (последовательности). Найти производную заданной функции. Найти асимптоты, промежутки монотонности и экстремумы данной функции, построить схематично ее график. Найти заданный интеграл. Вычислить площадь заданной фигуры. Вычислить объем заданного тела. Исследовать на сходимость данный числовой ряд. Доказать равномерную сходимость заданного ряда на указанном множестве. Разложить заданную функцию в ряд Тейлора. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле. Решить данное дифференциальное уравнение. Решить задачу Коши для заданного дифференциального уравнения.

Привести пример неприводимого (приводимого) многочлена над заданным полем. Вычислить определитель заданной матрицы. Решить данную систему линейных уравнений. Решить в целых числах данное уравнение (систему уравнений). Привести примеры алгебраических (трансцендентных) чисел над указанным полем. Решить задачу на делимость. Доказать, что группа, обладающая неким заданным свойством – абелева. Установить линейную зависимость (независимость) заданных элементов линейного пространства.

Написать аналитическое задание указанного движения. Написать уравнение касательной к данной в пространстве прямой, параллельной указанной плоскости. Решить задачу по элементарной геометрии. Решить геометрическую задачу векторным способом. Найти скалярное произведение заданных векторов. Найти угол между заданными прямыми. Найти кривизну заданной кривой.

Расположите заданные утверждения в виде цепочки, где каждое последующее утверждение следует из предыдущего.

Раскройте этапы работы с понятием «параллелограмм» на уроке геометрии в основной школе.

Выделите структуру теоремы о величине угла, вписанного в окружность, и опишите этапы работы с этой теоремой на уроке. Выделите этапы работы с правилом сложения двух рациональных чисел с разными знаками в 6 классе.

Опишите этапы работы с задачей: «Во время лыжной гонки на 20 км победитель пришел к финишу на 20 минут быстрее, чем аутсайдер. Найдите скорость каждого из упомянутых лыжников, зная, что один из них двигался со скоростью, на 2 км/ч большей».

Найдите ошибку в следующих рассуждениях ученика. «Для того чтобы ответить на вопрос, сколько нулей понадобится для записи всех трехзначных чисел, нужно сосчитать, сколько трехзначных чисел содержат нули. Начнем с первой сотни - 9 нулей (101,102,103...109) плюс еще 9 нулей (110,120, ...,190), т.е. 18 нулей. Всего сотен – 9. Значит 18 нужно умножить на 9, получим 162 нуля». В чем возможная причина ошибки?

В чем ошибка в следующем решении уравнения $\sqrt{x^2 - 5} + 2 = 0$? $\sqrt{x^2 - 5} = -2$, $\sqrt{x^2 - 5} = -2$, $x^2 - 5 = 4$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Как показать ученику, что он допустил ошибку, и как ее исправить?

7. Рекомендуемая литература (основная и дополнительная)

Основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1 – 3. Издания разных лет.
2. Ляпин Е.С., Евсеев А.Е. Алгебра и теория чисел. Ч.1. и 2. – М., «Просвещение». Издания разных лет.
3. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. – СПб., 1997. – Т. 1.
4. Вернер А.Л., Кантор Б.Е., Франгулов С.А. Геометрия: учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. – СПб., 1997. – Т. 2.
5. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Математическая логика. М: Едиториал УРСС, 2005. – 240 с.
6. Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования – www.edu.ru .
7. Программа по математике для средней школы - Сборник нормативных документов. Математика - М., Дрофа, 2000.
8. Методика и технологии обучения математике. Курс лекций /Под научной редакцией Н.Л.Стефановой и Н.С.Подходовой - М., Дрофа, 2005.
9. Методика и технологии обучения математике. Лабораторный практикум /Под научной редакцией В.В.Орлова - М., Дрофа, 2008
10. Методика обучения математике. Учебник для академического бакалавриата /Под ред. Н.С.Подходовой и В.И.Снегуровой. Части 1 и 2 – М., Юрайт, 2017.
11. Учебники по математике для общеобразовательной школы (федеральный комплект) см. WWW.school.edu.ru
12. Национальная образовательная инициатива «Наша новая школа» (<http://www.educom.ru>)

Дополнительная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. 1-2. Издания разных лет.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М. Издания разных лет.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М. Издания разных лет.

4. Ефимов Н.В. Высшая геометрия: Учебное пособие для вузов. – Издания разных лет.
5. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования (<http://www.mschools.ru/old/190.htm>)
6. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Составитель В.И.Мишин - М., Просвещение, 1987
7. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе. – М., Просвещение, 2002.
8. Рыжик В.И. 30000 уроков математики. - М., Просвещение, 2003
9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969
10. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях (элементы теории вероятностей в курсе средней школы) /Пер. с франц. - М., Просвещение, 1979.

Приложение

Пример варианта экзаменационных заданий

1. Изобразите на плоскости числа $z \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию $(z + \bar{z})^2 = z\bar{z}$, где \bar{z} – число, сопряжённое числу z .
2. Найдите все матрицы, перестановочные с матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. Найдите множество середин хорд окружности $x^2 + y^2 = 16$, проходящих через точку $(-4, 0)$.
4. Вычислите длину ребра куба, две грани которого лежат в плоскостях

$$x - y + 5z - 54 = 0 \text{ и } x - y + 5z + 27 = 0.$$
5. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума, асимптоты и постройте схематично график функции $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.
6. Найдите интеграл $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$.
7. Решите уравнение $y'' + 9y = x \sin 3x$.
8. Установите соответствие задач на сравнение чисел и целесообразных приемов их решения в 5-6 классах:

$$L1: \frac{4}{7} \text{ и } \frac{9}{5};$$

$$L2: \frac{89}{90} \text{ и } 1;$$

$$L3: \frac{5}{72} \text{ и } \frac{5}{31};$$

$$L4: \frac{7}{22} \text{ и } \frac{13}{22};$$

$$L5: 1 \text{ и } \frac{1}{1001}.$$

R1: Свойство сравнения правильной и неправильной дроби;

R2: Приведение дробей к общему знаменателю и сравнение их числителей;

R3: Использование определения и свойства правильной дроби;

R4: Использование определения и свойства неправильной дроби;

R5: Сравнение знаменателей при одинаковых числителях;

R6: Сравнение числителей при одинаковых знаменателях.

Ответ:

L1	L2	L3	L4	L5

На каком теоретическом факте основано правило сравнения дробей с одинаковыми числителями, но разными знаменателями?

9. Выделите этапы работы при решении следующей задачи и раскройте содержание каждого из них.

Задача. За два оборота по круговой орбите вокруг Земли космический корабль проделал путь в 84152 км. На какой высоте над поверхностью Земли находится корабль, если радиус Земли равен 6370 км?

Какие допущения в формулировке данной задачи не соответствуют реальной ситуации, описанной в ней?

10. Какие ошибки допущены учащимися при решении следующей задачи и в чем, по-вашему, их причина.

Решить неравенство $\sqrt{(x+3)(x-8)} \leq x+2$.

Решение. $(x+3)(x-8) \leq (x+2)^2$

$$x^2 - 5x - 24 \leq x^2 + 4x + 4$$

$$-9x \leq 28$$

$$x \leq -3\frac{1}{9}$$

Ответ. $x \in (-\infty, -3\frac{1}{9}]$.

Заполните следующую таблицу:

№	Описание ошибки	Причина ошибки

Приведите образец правильного решения.